Masse krümmt den Raum

Mit Modellen zu einem Verständnis gekrümmter Räume

Corvin Zahn, Ute Kraus

16. Mai 2024

„Masse krümmt den Raum“ ist eine der bekanntesten Aussagen zur Allgemeinen Relativitätstheorie; im populärwissenschaftlichen Bereich häufig illustriert anhand von Analogien, die aber fachlich wenig befriedigend sind sowie nachweislich Ursachen von Fehlvorstellungen darstellen.

In diesem Beitrag schildern wir eine Unterrichtseinheit, die den Zusammenhang zwischen Materieverteilung und Raumkrümmung auf eine fachlich fundierte Weise mit Hilfe von Modellen erklärt. Die Unterrichtseinheit kann ab etwa Klasse 10 eingesetzt werden. Kenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie sind nicht erforderlich.

1 Von Newton zu Einstein

Die Bühne für die newtonsche Beschreibung der Welt ist ein unveränderlicher Raum mit euklidischer Geometrie. Ohne Gravitationsfeld bewegen sich ansonsten kräftefreie Körper in diesem Raum auf Geraden. Ein Gravitationsfeld sorgt dafür, dass ein Körper eine Beschleunigung erfährt und seine Bewegung von der Geraden abweicht.

Albert Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie erklärt das Phänomen der Schwerkraft auf eine neue Weise: In Einsteins Beschreibung gibt es kein Gravitationsfeld. Aber: Die Bühne, auf der sich die Körper bewegen, der Raum, ist nicht mehr starr, seine Geometrie ist nicht mehr euklidisch. Die Geometrie ist dynamisch und wird von der Massenverteilung im Raum bestimmt. Aus dieser Geometrie folgen dann die Bahnen von Teilchen und Licht.

Wie hängt aber diese Geometrie des Raumes (genauer von Raum und Zeit) mit der Massenverteilung zusammen? Einstein hat 1915 mit seinen Feldgleichungen eine Beziehung zwischen Masse- bzw. Energieverteilung und der Krümmung der Raumzeit gefunden, die das newtonsche Gravitationsgesetz ersetzt.

Für schwache Gravitationsfelder macht die einsteinsche Theorie die gleichen Voraussagen wie die newtonsche Theorie und beschreibt mit großer Genauigkeit die gleichen Phänomene, wie z. B. den Fall eines Steins zum Boden oder die Bewegung der Planeten. Für starke Gravitationsfelder oder für das Universum als Ganzes ergeben sich jedoch Abweichungen, die zu neuen Vorhersagen führen, wie die Entstehung Schwarzer Löcher oder die Expansion des Universums.

Die einsteinschen Feldgleichungen sind sehr komplex und ihre Mathematik geht weit über das hinaus, was im Schulunterricht behandelbar ist. Die Theorie ist aber eine geometrische Theorie und damit der geometrischen Anschauung zugänglich. Die geometrische Größe, die in die Gleichungen eingeht, nämlich die Krümmung des Raums, ist etwas, das an einem maßstabsgerechten Modell direkt ablesbar ist.

Aufgabe 1: Was ist Schwerkraft?

Auf der Erde gibt es Schwerkraft. Was bedeutet das? Nennen Sie Beispiele!
Losgelassene Gegenstände fallen nach unten. Nach oben geworfene Gegenstände kommen wieder zurück etc.
Gibt es Schwerkraft auf dem Mond? Auf anderen Planeten?
Ja, aber sie kann stärker oder schwächer sein. Dies hängt von der Masse und der Größe des Planeten ab.

Aufgabe 2: Sind die Gesetze der Schulgeometrie universell?

Betrachten Sie einen Kreis. Wie lautet das geometrische Gesetz für seinen Umfang?
Umfang = 2 π Radius
Betrachten Sie einen Kreis auf einer Kugel. Er hat den Radius r *längs der Kugeloberfläche*. Wie groß ist hier der Umfang im Vergleich zum Kreis auf der Ebene?
Der Umfang ist kleiner als 2 π Radius.

2 Ein modellbasierter Kurs

In dem hier vorgestellten Unterrichtsvorschlag werden solche Modelle verwendet, um einen ersten Einblick in Einsteins neue Theorie zu geben. In der folgenden beispielhaften Beschreibung des Unterrichtsablaufs sind einige Boxen mit Vorschlägen für Aufgaben und Übungen eingebettet. Die erwarteten Antworten sind grün wiedergegeben. In den Aufgaben wird auf geometrische Modelle verwiesen. Diese können entweder als Pappmodelle selbst zusammengebaut oder als virtuelle Modelle im Browser bearbeitet werden. Sowohl Bastelbögen für die Pappmodelle als auch die virtuellen Modelle stehen online zur Verfügung ([3]).

3 Fokus setzen: Schwerkraft und Geometrie

Zu Beginn der Unterrichtseinheit wird Vorwissen der Schülerinnen und Schüler aktiviert, indem sie in Aufgabe 1 gefragt werden, was sie schon über die Schwerkraft wissen. In der Diskussion wird betont, dass die Schwerkraft von den Massen der wechselwirkenden Körper abhängt.

In Aufgabe 2 sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es außer der bisher in der Schule vermittelten euklidischen Geometrie auch andere Geometrien mit anderen geometrischen Gesetzen gibt.

Als weitere Hintergrundinformationen werden noch ein paar astronomische Grundlagen zu Schwarzen Löchern und Neutronensternen gebraucht, die z. B. mit einem Kurzvortrag oder Infoblatt eingeführt werden können (s. auch Infobox 1).

4 Vorschau: Gekrümmter Raum

Gelten die aus der Schule bekannten Gesetze der euklidischen Geometrie eigentlich in dem Raum, in dem wir leben? Nach Einsteins Theorie ist das nicht der Fall. Einen Raum, dessen Geometrie von der euklidischen Geometrie abweicht, nennt man „gekrümmten Raum“.

Was bestimmt die Geometrie des Raums? Die Verteilung von Materie und Energie. Das ist die moderne Theorie der Gravitation, formuliert von Albert Einstein im Jahr 1915: Masse bestimmt die Geometrie von Raum und Zeit (Nach Einsteins Formel $E = mc^2$ trägt Energie ebenso zur Masse bei).

Infobox 1: Schwarze Löcher und Neutronensterne

Ein Stern leuchtet durch Kernfusion: In seinem Zentrum wird Wasserstoff zu schwereren Elementen umgewandelt. Wenn der Kernbrennstoff verbraucht ist und die Kernfusion erlischt, fällt der Stern in sich zusammen.
Ein massereicher Stern bildet in seinem Endstadium einen Neutronenstern: Dieser hat ungefähr die 1,4-fache Masse der Sonne bei einem Durchmesser von etwa 20 km. Das entspricht einem typischen Stern, konzentriert auf die Größe einer Stadt! Er besteht nahezu komplett aus Neutronen und hat eine extrem hohe Dichte. Ein Stück aus einem Neutronenstern in der Größe eines Zuckerwürfels würde auf der Erde eine Milliarde Tonnen wiegen.
Ein noch massereicherer Stern kollabiert am Ende seiner Entwicklung zu einem Schwarzen Loch. Es gibt nichts, was diesen Kollaps aufhalten kann. Es bildet sich ein Horizont, durch den Materie und Licht einfallen können, aber nichts entweichen kann.

Was heißt es nun, dass Masse die Geometrie bestimmt? Darum geht es im hier beschriebenen Kurs. Als Beispiel wird der stark gekrümmte Raum in der Nähe eines Schwarzen Lochs und im Innern eines Neutronensterns betrachtet. Es wird deutlich, wie nach den einsteinschen Gleichungen die räumliche Krümmung mit der Materiedichte zusammenhängt.

Aber was ist eine räumliche Krümmung? Wie kann man sich einen dreidimensionalen gekrümmten *Raum* vorstellen? Um uns dem anzunähern, schauen wir uns zunächst zweidimensionale gekrümmte Flächen genauer an.

5 Gekrümmte Flächen

Die Unterrichtseinheit beginnt mit der Vorstellung gekrümmter Flächen anhand von Alltagsbeispielen wie einem Blatt Papier, der Oberfläche einer Kugel, eines Eis, eines Sattels oder eines Torus. Es gibt verschiedene Weisen, die Krümmung solcher Flächen zu untersuchen.

Wenn wir als dreidimensionale Wesen eine Fläche von außen betrachten, beobachten wir, dass sich die zweidimensionale Fläche in die dritte Dimension krümmt. Diese Krümmung in einen höherdimensionalen Raum wird als *äußere Krümmung* bezeichnet.

Wir können die geometrischen Auswirkungen der Krümmung aber auch aus der Innensicht betrachten: Stellen wir uns ein zweidimensionales Wesen vor, das *in* der Fläche lebt, sich vor und zurück, nach links und rechts, aber nicht aus der Fläche hinaus bewegen kann und keine Vorstellung von der dritten Dimension hat [1]. Möchte dieses zweidimensionale Wesen mit seinem zweidimensionalen Gehirn seine Welt beschreiben, ist nur die zweidimensionale Geometrie *innerhalb* der Fläche von Belang. Die Krümmung der Fläche in den Raum hat für dieses Wesen keine Auswirkungen. Beispielsweise ändert sich die Winkelsumme eines auf ein Blatt Papier gezeichneten Dreiecks nicht, wenn wir das Blatt Papier zu einem Zylinder zusammenrollen.

Diese innere Geometrie ist es auch, die in der Relativitätstheorie die Bahnen von Teilchen und Licht bestimmt. Wir brauchen also eine Methode, wie wir diese innere Geometrie, die sich in der sog. *inneren Krümmung* äußert, erkennen können. Am besten eine, die ohne den Blick von außen – aus einer höheren Dimension – auskommt. Dann können wir diese Methode auf den dreidimensionalen Raum anwenden und als dreidimensionale Wesen die innere Geometrie des dreidimensionalen Raums erfassen, in dem wir leben.

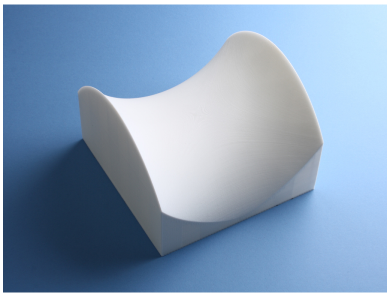
In Aufgabe 3 werden unterschiedlich gekrümmte Flächen genauer untersucht. Ein kurzer Trickfilm stellt

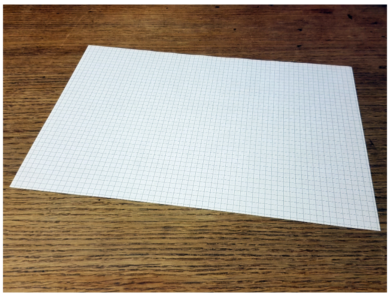
Aufgabe 3: Gekrümmte Flächen

Die Krümmung einer Fläche kann positiv, negativ oder null sein.

Typische Beispiele


Kugel: positive Krümmung


Sattel: negative Krümmung


Ebene: keine Krümmung

Wie steht es mit

- der Oberfläche eines Eis? **positive Krümmung**

- einem Kartoffelchip? **negative Krümmung**

Schauen Sie den Trickfilm „gekrümmte Flächen“ [3] an! Hier wird gezeigt, wie diese drei Fälle zu unterscheiden sind. Benutzen Sie die Methode aus dem Film, um in Gedanken die Krümmung folgender Objekte zu bestimmen:

- Oberfläche eines Torus **außen: positiv, innen: negativ**

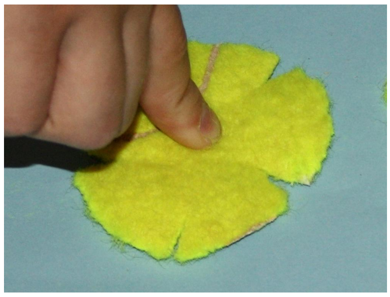
- eines Zylinders **null**

dabei positive, negative und verschwindende Krümmungen vor. Die im Film beschriebene Methode zur Unterscheidung der verschiedenen Krümmungsformen wird im zweiten Aufgabenteil angewandt. Infobox 2 fasst die Methode zusammen:

Infobox 2: Kriterien für positive / negative / verschwindende Krümmung einer Fläche

Schneiden Sie ein kleines Stück einer Fläche aus und drücken Sie es auf der Ebene flach!

Wenn es reißt, ist die Krümmung positiv. Beispiel: Kugel.



Wenn es Falten schlägt, ist die Krümmung negativ. Beispiel: Sattelfläche:

Wenn es flach liegt ohne zu reißen oder Falten zu schlagen, ist die Krümmung null. Beispiel: Ebene, Zylinder.

Am Beispiel des Torus wird deutlich, dass die Krümmung eine lokale, ortsabhängige Größe ist. An unterschiedlichen Stellen der Fläche kann die Krümmung einen unterschiedlichen Wert, sogar ein unterschiedliches Vorzeichen haben.

6 Sektormodelle von Flächen

Mit der in Aufgabe 3 erarbeiteten Methode des Plattdrückens einer Fläche konnten wir ihre innere Krümmung bestimmen. Das Plattdrücken selbst stellen wir uns aber als Operation vor, die in drei Dimensionen von außen auf die zweidimensionale Fläche wirkt. Wenn wir dies auf einen dreidimensionalen gekrümmten Raum übertragen wollen, ist nicht klar, was man unter dem „Plattdrücken" eines gekrümmten Raums verstehen soll.

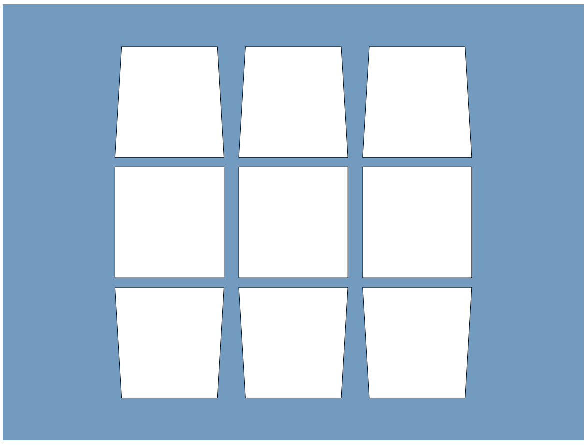
Wir suchen ein Modell eines dreidimensionalen gekrümmten Raums aus der Innensicht, das nicht von außen, von einer höheren Dimension aus, gesehen werden muss und mit dem auch die innere Krümmung bestimmt werden kann. Um uns diesem zu nähern konstruieren wir zunächst ein zweidimensionales Modell einer zweidimensionalen Fläche wie in Infobox 3 beschrieben. Ein solches Modell heißt *Sektormodell* [2].

In Aufgabe 4 übertragen wir die in Aufgabe 3 für die Bestimmung der Krümmung erarbeiteten Kriterien des Aufreißens und des Überlappens auf das Sektormodell und erkennen, wie man damit die Krümmung einer

Infobox 3: Sektormodell einer Kugeloberfläche

Dieses Beispiel erklärt Sektormodelle gekrümmter Flächen. Diese Sektormodelle werden später in erweiterter Form gebraucht, um gekrümmte Räume zu verstehen.
Drei Schritte führen von der Kugeloberfläche zu ihrem Sektormodell:

1. Die Oberfläche der Kugel wird in einzelne Flächenstücke aufgeteilt
2. Die Kantenlängen jedes Flächenstücks werden gemessen. Daraus konstruieren wir ein flaches Stück mit den gleichen Kantenlängen. Dies ist ein Sektor.
3. Die Sektoren werden in der Ebene ausgebreitet.

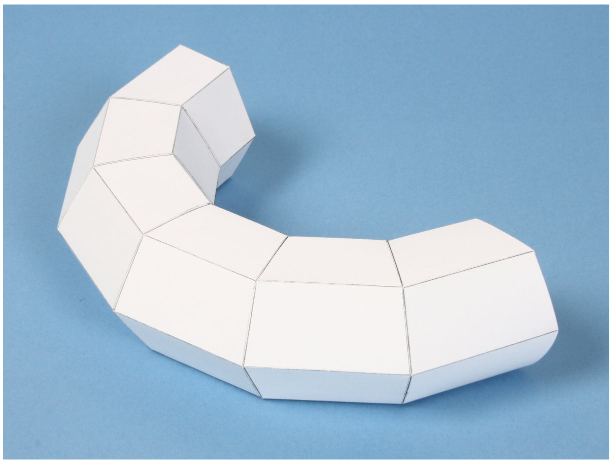


Fläche ermitteln kann. Dies ist jetzt die gesuchte Methode, die auch aus der Innensicht eines Flächenwesens funktioniert und keine zusätzliche Dimension benötigt.

Nach dem Bearbeiten der Aufgabe wird das Vorgehen noch einmal zusammengefasst: Füge drei Sektoren lückenlos um den gemeinsamen Vertex zusammen. Versuche, den vierten Sektor dazuzunehmen. Wenn das geht und eine Lücke bleibt: positive Krümmung. Wenn es nicht geht, weil nicht genug Platz vorhanden ist: negative Krümmung.

Dies ist in Aufgabe 5 illustriert. Die Sektoren im rechten Bild der Aufgabe 5 gehören zum Sektormodell einer Sattelfläche, dargestellt in Infobox 4.

Um das Verständnis für die Krümmung von Flächen und für die Handhabung von Sektormodellen noch einmal zu üben, wird zum Abschluss in Aufgabe 6 ein Sektormodell einer unbekannten Fläche, die beide Krümmungsarten enthält, untersucht. Es handelt sich hier um das Sektormodell eines Torus (Bild rechts).

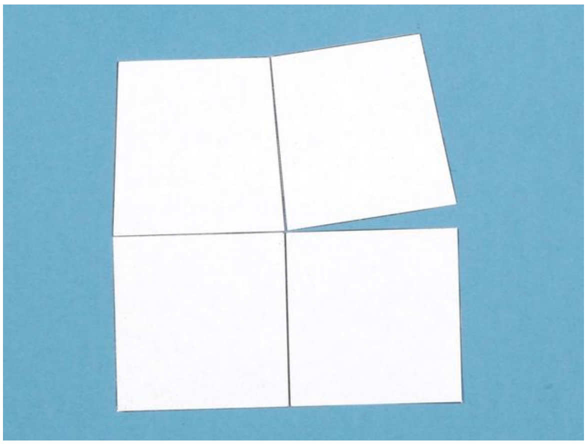


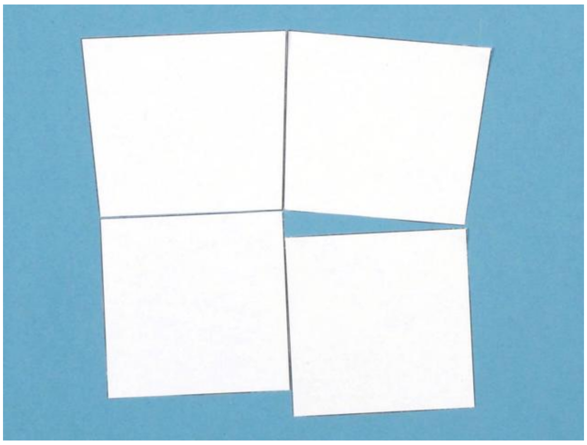
Aufgabe 4: Krümmung der Kugeloberfläche

Sie erhalten ein Sektormodell eines Ausschnitts aus einer Kugeloberfläche (Papier oder virtuell) [3].

So können Sie die Krümmung ermitteln:
Die vier Sektoren haben einen gemeinsamen Eckpunkt, an dem sie auf der ursprünglichen Kugelfläche zusammenstoßen. Ordnen Sie die vier Sektoren um diesen gemeinsamen Eckpunkt an. Wenden Sie wie vorher die Kriterien für positive, negative und verschwindende Krümmung an.
Welche Krümmung hat diese Fläche?
Es bleibt eine Lücke, dies entspricht einem Aufreißen: die Krümmung ist positiv.

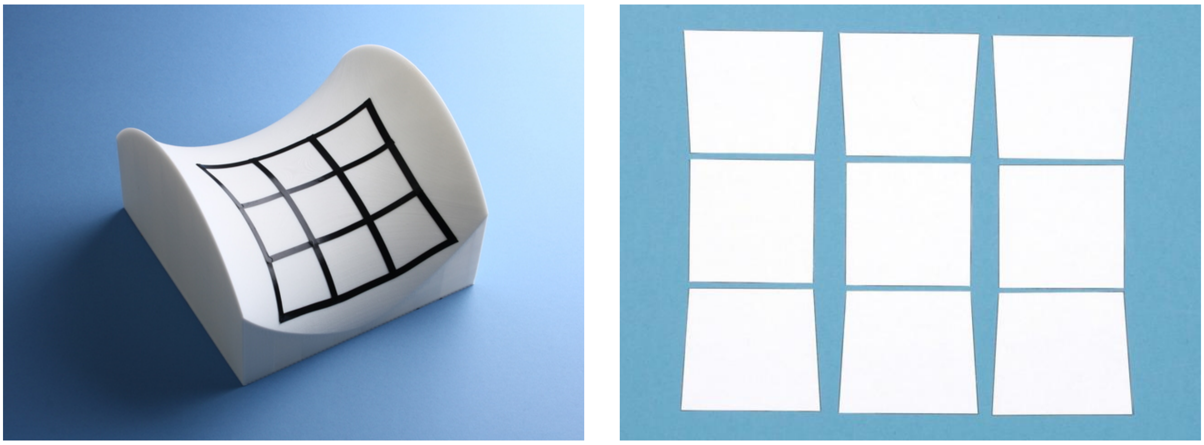
Aufgabe 5: Was können Sie über die Krümmung in diesen zwei Fällen sagen?





Links: positiv, Rechts: negativ. Dass im rechten Sektormodell nicht genug Platz ist, den vierten Sektor ganz bis zum gemeinsamen Vertex hin zu schieben, heißt, dass es hier eine Überlappung geben würde.

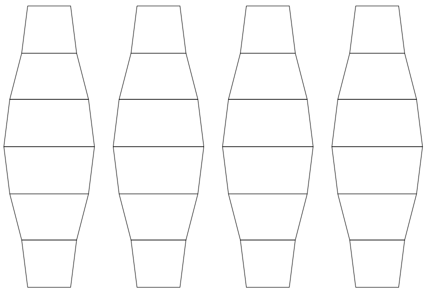
Infobox 4: Sattelfläche mit ihrem Sektormodell



Wie bei der Kugel wird die Oberfläche des Sattels in einzelne Flächenstücke aufgeteilt (links). Aus den Kantenlängen werden ebene Sektoren konstruiert (rechts).

Aufgabe 6: Eine unbekannte Fläche

Sie bekommen ein Arbeitsblatt mit dem Sektormodell einer Fläche [3]:



1. Beschreiben Sie die Krümmung dieser Fläche. Ist sie positiv, negativ oder null?
   In der Nähe des oberen und unteren Rands negativ, in der Nähe der horizontalen Mittellinie positiv.
2. Begründen Sie Ihre Antwort. Markieren Sie die Sektoren, die Sie dafür betrachtet haben.
   Zusammenlegen der ersten zwei Sektoren in der oberen Reihe und der ersten zwei Sektoren in der zweiten Reihe ergibt eine Überlappung. Zusammenlegen der ersten zwei Sektoren in der dritten Reihe und der ersten zwei Sektoren in der vierten Reihe ergibt eine Lücke.

7 Gekrümmte Räume

Nachdem wir aus der „Innensicht“ eines zweidimensionalen Wesens eine Methode zur Ermittlung der Krümmung einer zweidimensionalen Fläche entwickelt haben, können wir dies auf den dreidimensionalen Raum übertragen. Der gedankliche Übergang von zwei zu drei Dimensionen ist nicht ganz einfach. Er sollte im Unterricht gründlich diskutiert werden (Infobox 5, auch als Lückentextaufgabe verwendbar).

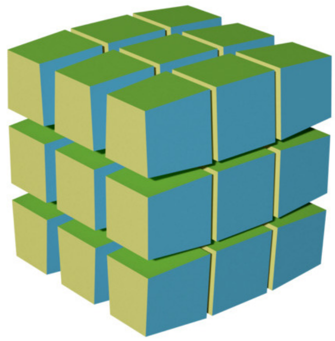
Infobox 5: Sektormodell: 2D nach 3D

Wir erweitern die Idee des Sektormodells von der Fläche zum Raum:

Eine Fläche wird in Flächenstücke unterteilt. $\rightarrow$ Ein Raum wird in **Raumstücke** unterteilt.

Das Sektormodell einer Fläche besteht aus ebenen Flächenstücken, die in der Ebene ausgelegt werden. $\rightarrow$ Das Sektormodell eines Raums besteht aus **Blöcken**, die im **ungekrümmten Raum** angeordnet werden.

Das Bild zeigt ein Beispiel für ein Sektormodell eines gekrümmten Raums. Es handelt sich um einen Raum mit konstanter positiver Krümmung, das dreidimensionale Äquivalent zu der positiv gekrümmten Kugeloberfläche.



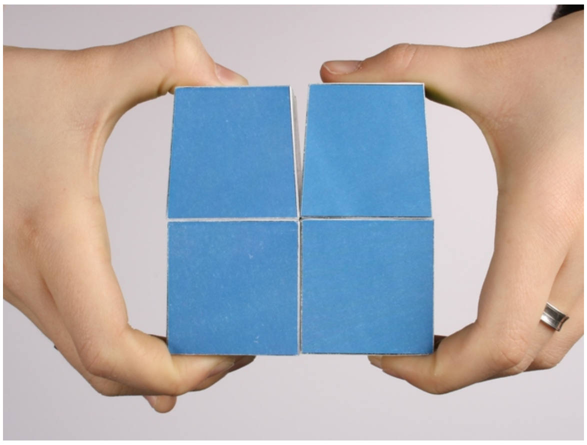
In den Aufgaben 7 und 8 übertragen wir jetzt die für die zweidimensionale Fläche entwickelte Methode zur Bestimmung der Krümmung auf den dreidimensionalen Raum.

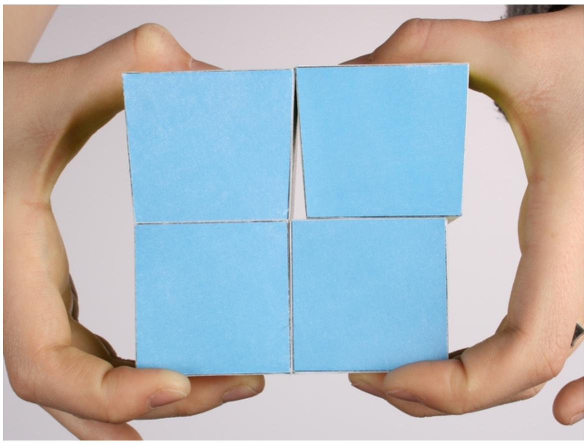
Aufgabe 7: Ermitteln der Krümmung eines Raums

In der Simulation (oder als Pappklötzchen) erhalten Sie einen Satz von vier Blöcken aus dem in Infobox 5 vorgestellten Modell [3].
Setzen Sie diese zusammen: die grünen Seiten oben und unten, aufeinander gelegte Seiten müssen in Farbe und Form genau zusammenpassen.
Prüfen Sie auf Krümmung! Können Sie sich vorstellen, wie der Krümmungstest von der Fläche in den Raum übertragen werden kann? Notieren Sie Ihre Ideen!
Fläche: vier Sektoren werden an einem gemeinsamen Eckpunkt zusammengesetzt. Raum: vier Sektoren werden an der gemeinsamen Kante zusammengesetzt. Die Prüfung auf Lücke oder Überlappung geht genauso wie in der Fläche.

Aufgabe 8: Unterschiedlich gekrümmte Räume

Die folgenden zwei Bilder zeigen Tests für die räumliche Krümmung: Vier Sektoren sind um eine gemeinsame Kante zusammengesetzt.
Was können Sie über die Krümmung sagen?

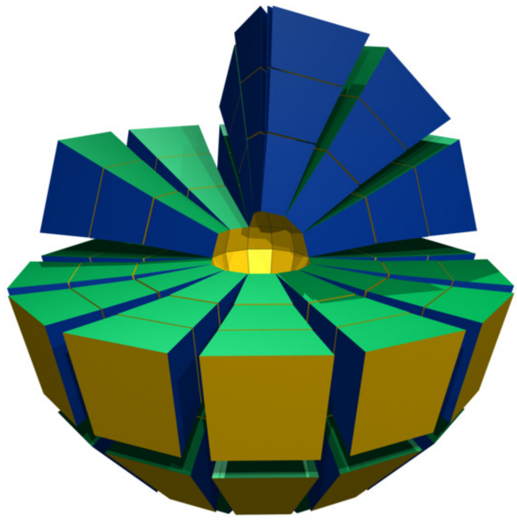




Links: positive, rechts: negative Krümmung.

8 Ein Schwarzes Loch

Die Abbildung rechts zeigt das Sektormodell des Raums um ein Schwarzes Loch[1].



Woher wissen wir, dass diese Blöcke so aussehen? Für einen Raumbereich im Weltall können wir ein Gedankenexperiment durchführen: Astronaut:innen fliegen zu dem Ort, von dem wir ein Sektormodell erstellen wollen. So wie wir vorher die zweidimensionale Erdoberfläche in einzelne Flächenstücke unterteilt haben, teilen unsere Astronaut:innen jetzt den dreidimensionalen Raum in Raumstücke auf. Dies ist in Infobox 6 erklärt. Anmerkung: In Wirklichkeit wird die mathematische Beschreibung des Raums verwendet, um die Kantenlängen auszurechnen.

So wie die zweidimensionalen Sektoren der gekrümmten Erdoberfläche auf dem ebenen Tisch nicht ohne Lücken ausgelegt werden können, passen die räumlichen Sektoren aus der Umgebung des Schwarzen Lochs hier im (nahezu) ungekrümmten Raum auf der Erde nicht lückenlos zusammen. Dies zeigt an, dass der Raum in der Nähe des Schwarzen Lochs gekrümmt ist.

Mit einem Schwarzen Loch der richtigen Masse im Zentrum des Modells würde der Raum so gekrümmt werden, dass alle Blöcke, *so wie sie sind*, lückenlos zusammenpassen würden.

Wir vergleichen mit der Kugeloberfläche: Wenn wir die Sektoren auf der Ebene auslegen, können sie nicht lückenlos zusammengelegt werden. Auf der ursprünglichen gekrümmten Kugeloberfläche würden die Flächenstücke mit den gleichen Maßen wie unsere Sektoren ohne Lücken zusammengefügt werden können (so sind sie ja konstruiert worden).

In Aufgabe 9 untersuchen wir den Raum in der Nähe des Schwarzen Lochs auf Krümmung. Hier kommt ein weiterer wichtiger Punkt zum Tragen, für den sich die Lehrkraft etwas Zeit nehmen muss: Es muss klar werden, dass man drei verschiedene Richtungen hat, in denen man die Sektoren um eine Kante zusammenlegen kann und dass man die Krümmung in allen drei Richtungen bestimmen muss. Das Ziel sollte sein, dass die Schülerinnen und Schüler dies selbstständig entdecken. Als Hinweis kann man die Frage zur Diskussion stellen, wie viele der acht Sektoren für den Test auf Krümmung gebraucht werden (vier) und welche vier das sein sollen. Die drei Krümmungskomponenten werden in Aufgabe 10 illustriert.

9 Einsteins Feldgleichungen

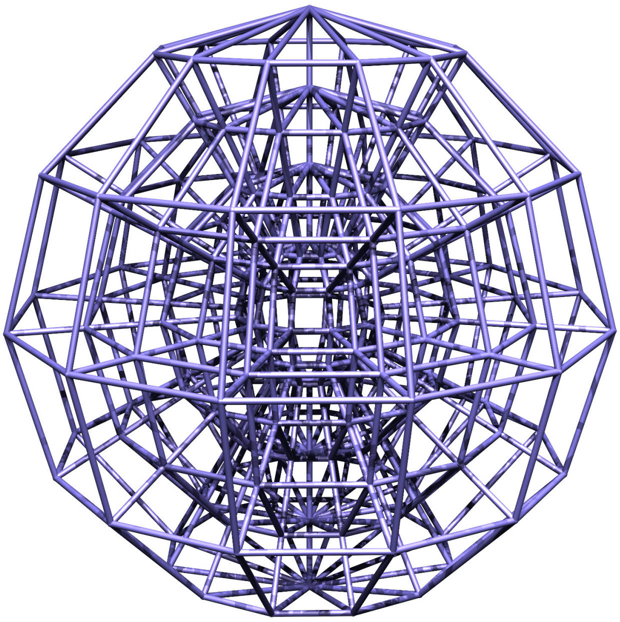
Nach Einstein hängt die Krümmung des Raums von seinem Massengehalt ab. Wir haben oben gesehen: Um die Krümmung des Raums festzustellen, muss man drei Komponenten betrachten. Die einsteinschen Feldgleichungen beschreiben den Zusammenhang dieser drei Krümmungskomponenten mit der Massendichte.

Die Summe der drei räumlichen Komponenten der Krümmung ist proportional zur Massendichte.

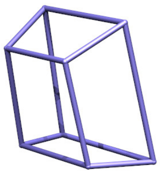
[1] Raum außerhalb des Ereignishorizonts. Innerhalb des Ereignishorizonts ist es nicht möglich, ein statisches Modell zu bauen.

Infobox 6: Konstruktion des dreidimensionalen Sektormodells

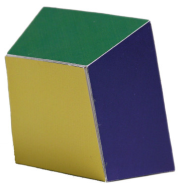
1. Im Weltall wird um das Schwarze Loch ein Gittergerüst errichtet.



2. Unsere Astronaut:innen bewegen sich durch das Gitter, messen die Längen der Gitterstäbe und senden diese Daten zur Erde. Damit kennen wir die Form und die Größe jeder Gitterzelle.



3. Wir bauen die Gitterzellen verkleinert aus Pappe nach.



$$K_1 + K_2 + K_3 = C\rho$$

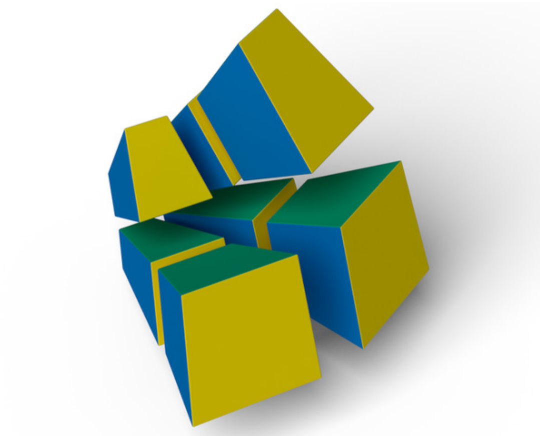
K_1, K_2 und K_3 sind die drei räumlichen Krümmungen, ρ die Massendichte und C ist eine Konstante, genauer $C = 8\pi G/c^2$, mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Gravitationskonstanten G.

Dies ist eine von zehn Feldgleichungen. Es ist die, die am einfachsten zu erklären ist, da sie nur rein räumliche Krümmungen enthält. Bei den anderen kommen raumzeitliche Krümmungen und andere Energieformen hinzu.

Der Raum, den wir gerade untersucht haben, ist der Raum in der Nähe eines Schwarzen Lochs. Dieser Raum ist leer. Seine Krümmung hat, wie wir oben gesehen haben, positive und negative Komponenten. Eine genaue Überprüfung ergibt, dass ihre Summe genau Null ist, was einer Dichte von Null und damit leerem Raum entspricht.

Aufgabe 9: Raumkrümmung in der Nähe eines Schwarzen Lochs

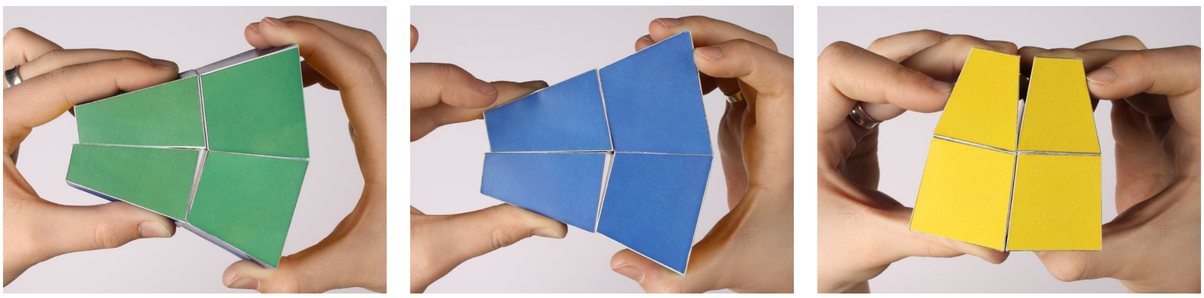
Sie erhalten einen Satz von acht Sektoren aus diesem Raum (Papier oder virtuell) [3].
Setzen Sie die Sektoren wie auf dem Bild zusammen (der besseren Übersicht halber sind hier nur sieben Blöcke dargestellt).
Testen Sie den Raum auf Krümmung!



Die Krümmung hängt von der Orientierung der Kante ab. Drei Kanten in die drei Raumrichtungen können getestet werden, die Krümmung ist zweimal negativ und einmal positiv.

Aufgabe 10: Drei Krümmungskomponenten

Beschreiben Sie die Tests auf Krümmung, die in den folgenden drei Bildern gezeigt sind. Welche Krümmungen können Sie jeweils erkennen?

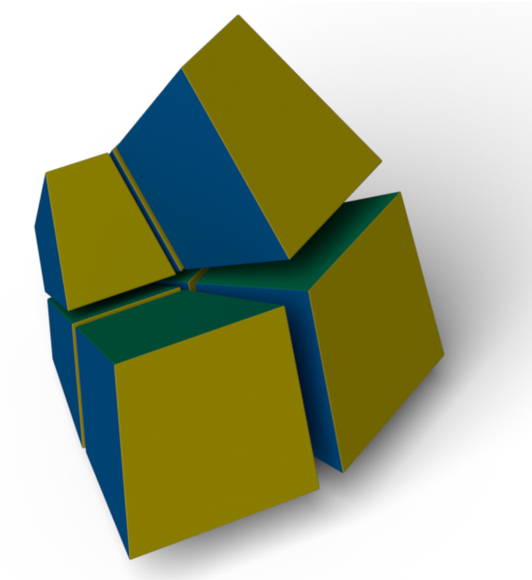


Links, Mitte: negative Krümmung, Rechts: positive Krümmung. Um die Krümmung dieses Raums zu ermitteln müssen drei Tests gemacht werden.

Aufgabe 11: Ein unbekannter Raum

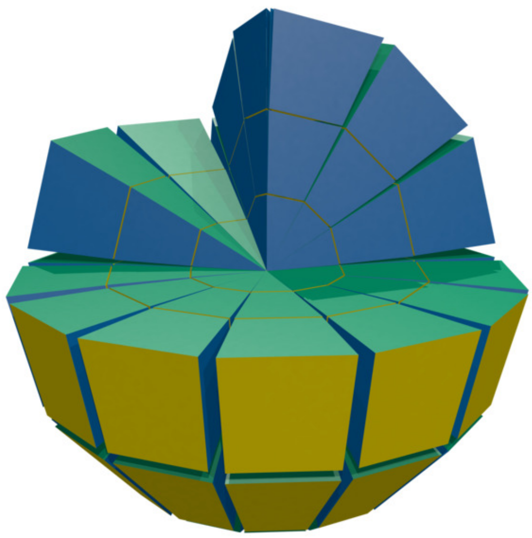
Sie untersuchen wieder einen Achterblock des Sektormodells eines Raums [3]. Das Bild rechts zeigt, wie die Sektoren zusammengehören.

1. Was ist die Krümmung dieses Raums? Begründen Sie ihre Antwort!
   Man muss in drei Richtungen die Krümmung bestimmen. Es treten in allen Fällen Lücken auf, d.h. alle drei Krümmungskomponenten sind positiv.
2. Enthält dieser Raum Materie? Begründen Sie ihre Antwort!
   Ja, der Raum enthält Materie. Alle drei Krümmungskomponenten sind positiv, damit auch ihre Summe und die dazu proportionale Materiedichte.



In Aufgabe 11 untersuchen wir einen zweiten gekrümmten Raum. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten wieder mit einem Achterblock aus Sektoren und bestimmen die Krümmung dieses Raums.

Die acht Sektoren sind Teil des rechts abgebildeten Sektormodells. Es beschreibt den Raum im Inneren eines Neutronensterns. Erst bei den extrem hohen Dichten im Inneren eines Neutronensterns wird die Raumkrümmung so groß, dass sie im Modell mit bloßem Auge sichtbar wird. Dies zeigt umgekehrt, warum wir im Alltag auf der Erde bei Umgebungsdichten von einem Billiardstel der Neutronensterndichte keine Abweichung von der euklidischen Geometrie feststellen können.



10 Zusammenfassung: Was wir gelernt haben

Wir können uns jetzt einen gekrümmten Raum vorstellen: Wir denken an sein Sektormodell.

Wir können die Krümmung des Raums ermitteln und wissen, dass wir diese in drei Richtungen messen müssen: Die Krümmung hat mehrere Komponenten.[2]

Wenn wir an einem Sektormodell die Krümmung des Raums ermitteln, können wir erkennen, ob dieser Raum mit Materie gefüllt ist.

[2] Im allgemeinen hat ein gekrümmter Raum sechs unabhängige Krümmungskomponenten. Das Schwarze Loch und der Neutronenstern sind kugelsymmetrisch. In diesem Fall sind nur drei Komponenten ungleich Null.

Da wir ein maßstabsgerechtes Modell des Raums haben, könnten wir durch genaues Abmessen sogar den Zahlenwert der Krümmung bestimmen. Am dreidimensionalen Sektormodell kann man so alle drei Krümmungen abmessen, diese in Einsteins Gleichung einsetzen und so den Zahlenwert der Materiedichte berechnen.

11 Ausblick

Die linke Seite der Feldgleichungen beschreibt die Geometrie, die rechte Seite die Materie- und Energieverteilung. In diesem Kurs wird nur eine der insgesamt zehn Gleichungen behandelt, nämlich die, welche die dreidimensionale räumliche Geometrie mit der Materiedichte verknüpft.

Wir leben jedoch in einer vierdimensionalen *Raumzeit*. Um die Bewegung von Licht und Materie mit einem Sektormodell korrekt zu beschreiben, muss dieses um die Zeitdimension erweitert werden. Dies ist möglich; da man aber nur drei Dimensionen für ein anfassbares Modell hat, muss man dabei auf eine Raumdimension verzichten. Ein Raumzeitsektormodell bildet dann zwei Raumdimensionen und eine Zeitdimension ab. Die einzelnen Sektoren sind Ausschnitte aus einer ungekrümmten Raumzeit, sie können als kleine Minkowski-Diagramme gesehen werden, in denen die Spezielle Relativitätstheorie gilt.

An diesen raumzeitlichen Sektoren können dann raumzeitliche Krümmungen abgelesen werden, die auf der linken Seite in die vollständigen Feldgleichungen eingehen. Für ein komplettes Bild der rechten Seite der Feldgleichungen müssen noch weitere Energieformen einbezogen werden, die zur Krümmung der Raumzeit beitragen ([4]).

Der Physiker John A. Wheeler fasste die Allgemeine Relativitätstheorie so zusammen: *Materie und Energie krümmen Raum und Zeit und die gekrümmte Raumzeit bestimmt die Bahnen von Materie und Licht*.

Um den ersten Teil dieser Aussage geht es in dem hier beschriebenen Kurs. Zum zweiten Teil, der die Wirkungen der Raumzeitkrümmung beschreibt, finden Sie in auf unsere Webseite den Beitrag *Lichtablenkung – Aber gerade!* ([5]) zu einer Unterrichtseinheit über die Ausbreitung von Licht im Schwerefeld. Zusammen bilden diese beiden Unterrichtseinheiten eine fachlich fundierte und anschauliche erste Einführung in das Grundkonzept der Allgemeinen Relativitätstheorie: *Gravitation ist Geometrie!*

Literatur

[1] Abbott, E. 1884 *Flatland, A Romance in Many Dimensions* (London: Seely & Co)

[2] Zahn, C. und Kraus, U. 2014 Sektormodelle – Ein Werkzeugkasten zur Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie. I: Gekrümmte Räume und Raumzeiten,
`https://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sectormodels1`

[3] Zahn, C. und Kraus, U. 2022 Unterrichtsmaterialien zu diesem Beitrag,
`https://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/curv22`

[4] Kraus, U. and Zahn, C. 2019, *J. Phys.: Conf. Ser. 1286 012025*, Teaching General Relativity with sector models: the field equations,
`https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1286/1/012025`

[5] Weissenborn, S. und Marakis, V. 2022, Lichtablenkung - Aber gerade!,
`https://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/geod22`